Variable Compleja I
Examen XVI

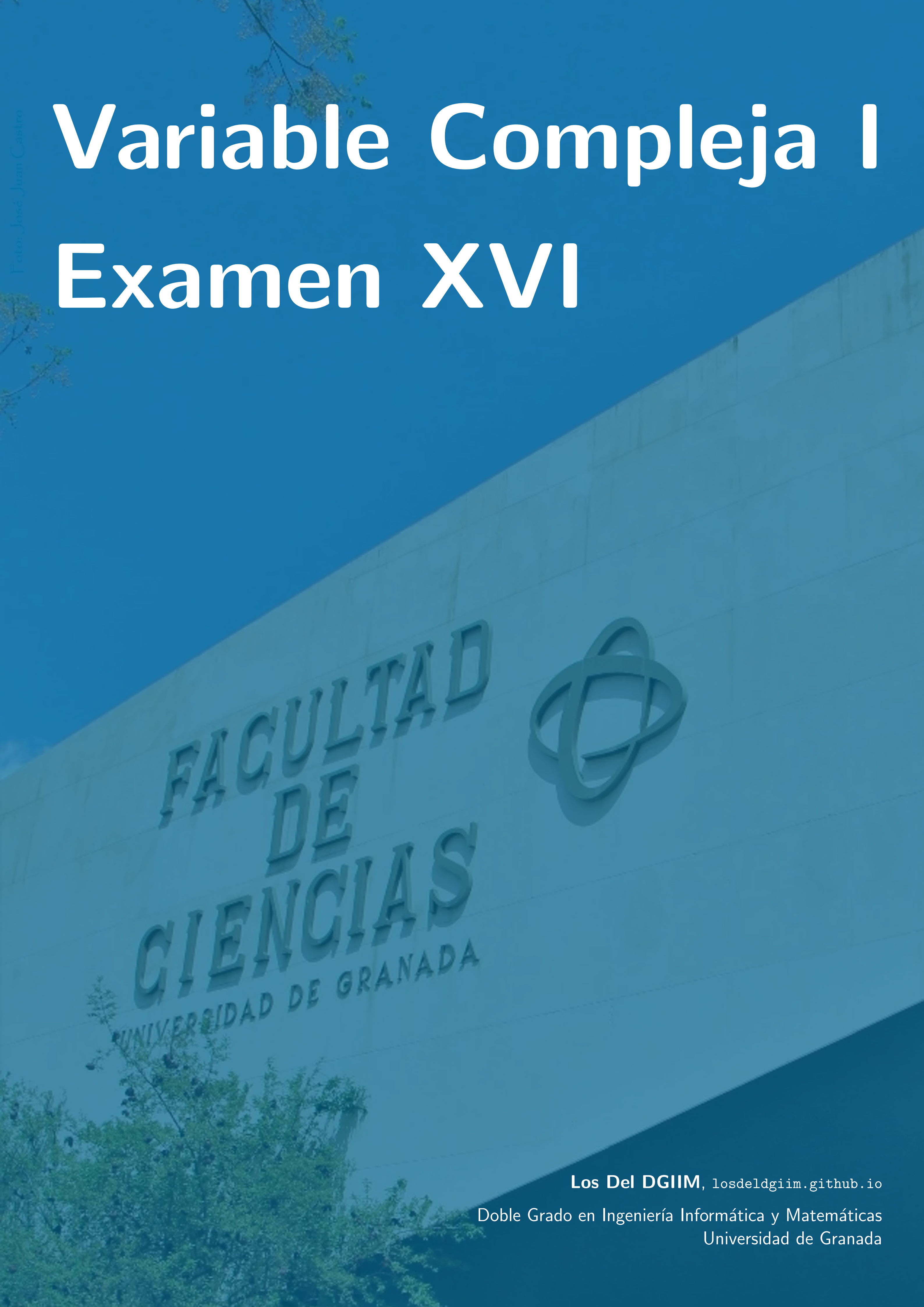

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen XVI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Fecha 15 de Junio de 2022.

Duración 3.5 horas.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R, 0 < \arg z < \pi/2\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, calcular la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^4}\, dx.$$

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} e^{z-t} \operatorname{sen}(tn + z^2)\, dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demostrar que:

1. f_n es holomorfa en $\mathbb{C}$.
2. La serie de funciones $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{C}$ y su suma es una función entera.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Demostrar que, si la función $\operatorname{Im} f$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω, entonces f es constante.

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.

Ejercicio 1 (2.5 puntos)**.** Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R, 0 < \arg z < \pi/2\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, calcular la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^4}\, dx.$$

Calculamos primero los puntos donde se anula el denominador de la función a integrar:

$$1+z^4 = 0 \Longrightarrow z^4 = -1 \Longrightarrow z \in \left\{e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)} : k \in \{0,1,2,3\}\right\} = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}\right\}.$$

Para cada $k \in \{0,1,2,3\}$, definimos por simplicidad:

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$$

Sea por tanto $A = \{z_k : k \in \{0,1,2,3\}\}$. Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}\setminus A & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{\log(z)}{1+z^4} \end{array}$$

Notemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus A)$, y que $A' = \emptyset$, por lo que podemos aplicar el Teorema de los Residuos. Como $\mathbb{C}$ es homológicamente conexo, podemos aplicar el Teorema de los Residuos para cualquier ciclo Σ en $\mathbb{C}\setminus A$. Para todo $R > 1$ y $\varepsilon \in]0,1[$, consideramos el siguiente ciclo:

$$\Sigma_{\varepsilon,R} = -\gamma_\varepsilon + [\varepsilon, R] + \sigma_R - [i\varepsilon, iR]$$

representada en la Figura 1, donde:

$$\begin{array}{rccc} \gamma_\varepsilon: & [0,\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \varepsilon e^{it} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} [\varepsilon,R]: & [\varepsilon,R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & t \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \sigma_R: & [0,\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & Re^{it} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} [i\varepsilon,iR]: & [\varepsilon,R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & it \end{array}$$

Por el Teorema de los Residuos, tenemos que:

$$\int_{\Sigma_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{w_0 \in A} \operatorname{Res}(f, w_0) \operatorname{Ind}_{\Sigma_{\varepsilon,R}}(w_0).$$

Calculemos ahora los índices de los polos. Por cómo hemos definido el ciclo, tenemos que:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ind}_{\Sigma_{\varepsilon,R}}(z_0) = 1 \\ &\operatorname{Ind}_{\Sigma_{\varepsilon,R}}(z_k) = 0 \quad \text{para todo } k \in \{1,2,3\}. \end{aligned}$$

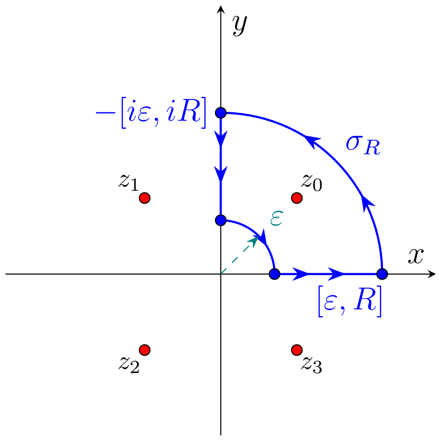

Figura 1: Ciclo de integración $\Sigma_{\varepsilon,R}$ del Ejercicio 1.

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{\Sigma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_0).$$

Antes de calcular el residuo, calculemos las integrales resultantes. Tenemos que:

$$\int_{[\varepsilon,R]} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{\log(z)}{1+z^4}\,dz$$

Tomando límite con $\varepsilon \to 0^+$, y $R \to +\infty$, tenemos lo buscado.

Veamos ahora qué ocurre con la integral sobre el segmento $[i\varepsilon, iR]$:

$$\begin{aligned}\int_{[i\varepsilon,iR]} f(z)\,dz &= i\int_\varepsilon^R f(it)\,dt = i\int_\varepsilon^R \frac{\log(it)}{1+(it)^4}\,dt = i\int_\varepsilon^R \frac{\ln t + i\arg(it)}{1+t^4}\,dt = \\ &= i\int_\varepsilon^R \frac{\ln t + i\cdot {}^{\pi}/_{2}}{1+t^4}\,dt = -\frac{\pi}{2}\cdot\int_\varepsilon^R \frac{1}{1+t^4}\,dt + i\int_\varepsilon^R \frac{\ln t}{1+t^4}\,dt.\end{aligned}$$

Veamos ahora qué ocurre con la integral sobre la curva γ_ε:

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\varepsilon\cdot\sup\left\{\left|\frac{\log(z)}{1+z^4}\right| : z\in\gamma_\varepsilon^*\right\}$$

Para todo $z \in \gamma_\varepsilon$, tenemos que:

$$\begin{aligned}|1+z^4| &\geqslant \big||1|-|z^4|\big| = \left|1-\varepsilon^4\right| = 1-\varepsilon^4 \\ |\log(z)| &= |\ln|z|| + |\arg(z)| \leqslant \ln\varepsilon + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\varepsilon\cdot\frac{\ln\varepsilon+\frac{\pi}{2}}{1-\varepsilon^4}.$$

Como esta expresión es válida para cualquier $\varepsilon \in]0,1[$, podemos hacer $\varepsilon \to 0^+$ y tenemos que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

Veamos ahora qué ocurre con la integral sobre σ_R:

$$\left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot R \cdot \sup\left\{\left|\frac{\log(z)}{1+z^4}\right| : z \in \sigma_R^*\right\}$$

Para todo $z \in \sigma_R$, tenemos que:

$$\begin{gathered}
|1+z^4| \geqslant \big||1| - |z^4|\big| = \left|1 - R^4\right| = R^4 - 1 \\
|\log(z)| = |\ln|z| + |\arg(z)| \leqslant \ln R + \frac{\pi}{2}
\end{gathered}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot R \cdot \frac{\ln R + \frac{\pi}{2}}{R^4 - 1}.$$

Como esta expresión es válida para cualquier $R > 1$, podemos hacer $R \to +\infty$ y tenemos que:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Uniendo todas las integrales que hemos calculado, tenemos que:

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = \int_0^\infty \frac{\log(t)}{1+t^4}\,dt + \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1+t^4}\,dt - i \int_0^\infty \frac{\log(t)}{1+t^4}\,dt$$

Calculemos ahora el residuo en el punto $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \left(z - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) f(z) &= \log\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{\log\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}{4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3} = \frac{i \cdot \pi/4}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{i\pi e^{i\frac{7\pi}{4}}}{16} = \\
&= \frac{i\pi}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{i\pi\sqrt{2}}{32}(1-i)
\end{aligned}$$

Por tanto, sabemos que f tiene un polo simple en $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, y que:

$$\operatorname{Res}\left(f, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{i\pi\sqrt{2}}{32}(1-i)$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
2\pi i\left(\frac{i\pi\sqrt{2}}{32}(1-i)\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{\log(t)}{1+t^4}\,dt + \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt - i\int_0^{+\infty} \frac{\log(t)}{1+t^4}\,dt \\
-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}(1-i) &= \int_0^{+\infty} \frac{\log(t)}{1+t^4}\,dt + \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,dt - i\int_0^{+\infty} \frac{\log(t)}{1+t^4}\,dt
\end{aligned}$$

Igualando las partes imaginarias, tenemos que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(t)}{1+t^4}\,dt = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

Ejercicio 2 (2.5 puntos)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f_n(z) = \int_n^{n+1} e^{z-t} \operatorname{sen}(tn + z^2)\, dt \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demostrar que:

1. f_n es holomorfa en $\mathbb{C}$.

   Definimos Φ como sigue:

   $$\begin{array}{rrcl} \Phi : & [n, n+1] \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (t, z) & \longmapsto & e^{z-t} \operatorname{sen}(tn + z^2) \end{array}$$

   Tenemos claramente que Φ es continua en $[n, n+1] \times \mathbb{C}$, y para cada $t \in [n, n+1]$, la función $z \mapsto \Phi(t, z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, por el Teorema de Holomorfía de Integrales dependientes de un parámetro, se concluye que $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

2. La serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{C}$ y su suma es una función entera.

   Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Para todo $z \in K$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

   $$\begin{aligned} |f_n(z)| &= \left| \int_n^{n+1} e^{z-t} \operatorname{sen}(tn + z^2)\, dt \right| \\ &\leqslant \sup \left\{ \left| e^{z-t} \operatorname{sen}(tn + z^2) \right| : t \in [n, n+1] \right\} \end{aligned}$$

   Hacemos uso de que, para cada $t \in [n, n+1]$, tenemos que:

   $$\begin{aligned} |e^{z-t}| &= e^{\operatorname{Re}(z)-t} \leqslant e^{\operatorname{Re}(z)-n} \\ |\operatorname{sen}(tn + z^2)| &\leqslant |\operatorname{sen}(tn)\cos(z^2)| + |\cos(tn)\operatorname{sen}(z^2)| \leqslant |\cos(z^2)| + |\operatorname{sen}(z^2)| \end{aligned}$$

   Además, como K es compacto y las funciones parte real, seno y coseno son continuas, tenemos que $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ tales que:

   $$\begin{aligned} M_1 &= \text{máx}\, \{\operatorname{Re}(z) : z \in K\} \\ M_2 &= \text{máx}\, \left\{ |\cos(z^2)| + |\operatorname{sen}(z^2)| : z \in K \right\} \end{aligned}$$

   Por tanto, tenemos que:

   $$|f_n(z)| \leqslant e^{M_1 - n} M_2$$

   Veamos ahora que la serie de las cotas converge. Para ello, previamente vemos que la siguiente serie converge:

   $$\sum_{n\geqslant 1} e^{-n} = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{e} \right)^n$$

   Como $1/e < 1$, la serie anterior converge. Por tanto, tenemos que la serie de las cotas converge, y por el Test de Weierstrass, la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$

converge uniformemente en K.

Por el Teorema de Convergencia de Weierstrass, la suma de la serie de funciones es una función holomorfa en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3 (2.5 puntos)**.** Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Demostrar que, si la función $\operatorname{Im} f$ tiene un extremo relativo en un punto de Ω, entonces f es constante.

Definimos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & e^{-if(z)} \end{array}$$

.

Como f es holomorfa, g es holomorfa en Ω. Calculemos su módulo:

$$|g(z)| = |e^{-if(z)}| = e^{\operatorname{Im} f(z)}.$$

Como $\operatorname{Im} f$ tiene un extremo relativo en un punto $z_0 \in \Omega$, como la exponencial real es estrictamente creciente, entonces $|g|$ tiene un extremo relativo en z_0.

- Si $\operatorname{Im} f$ tiene un máximo relativo en z_0, entonces $|g|$ tiene un máximo relativo en z_0. Por el principio del módulo máximo, g es constante en Ω.

- Si $\operatorname{Im} f$ tiene un mínimo relativo en z_0, entonces $|g|$ tiene un mínimo relativo en z_0. Por el principio del módulo mínimo, como la exponencial compleja no se anula, g es constante en Ω.

En cualquier caso, g es constante en Ω. Sea por tanto $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tal que:

$$g(z) = e^{-if(z)} = \alpha \quad \forall z \in \Omega.$$

Por tanto, se tiene que:

$$f(z) \in i \operatorname{Log}(\alpha) \qquad \forall z \in \Omega.$$

Como además f es continua y dicho conjunto es discreto, se tiene que $\exists \beta \in i \operatorname{Log}(\alpha)$ tal que:

$$f(z) = \beta \quad \forall z \in \Omega.$$

Por tanto, f es constante en Ω.

Ejercicio 4 (2.5 puntos)**.** Sean $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de modo que

$$f\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que una de las funciones es un polinomio de grado uno y que la otra es un polinomio de grado tres.

Definimos el siguiente conjunto:

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Como $A' = \{0\} \subset \mathbb{C}$, podemos aplicar el Pincipio de Identidad, y deducir que:

$$f(g(z)) = z^3 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Supongamos que g es una función entera no polinómica. Por el Corolario del Teorema de Casorati, $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ con $\{z_n\} \to \infty$ tal que:

$$\{g(z_n)\} \to 0.$$

Ese hecho, junto con la continuidad de f, nos permite deducir que:

$$\{f(g(z_n))\} \to f(0).$$

Por otro lado, $\{z_n\} \to \infty$, junto con la continuidad de f, g y que $f(g(z)) = z^3$, nos permite deducir que:

$$\{f(g(z_n))\} \to \infty.$$

Por tanto, llegamos a que la sueción $\{f(g(z_n))\}$ es a la vez convergente y divergente, lo que es una contradicción. Por tanto, g es un polinomio.

Suponemos ahora que f no es un polinomio. Por el Corolario del Teorema de Casorati, $\exists \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ con $\{w_n\} \to \infty$ tal que:

$$\{f(w_n)\} \to 0.$$

Ahora, haciendo uso de que g es sobreyectiva por ser un polinomio (gracias al Teorema Fundamental del Álgebra), podemos encontrar una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que:

$$g(z_n) = w_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\{f(g(z_n))\} = \{f(w_n)\} \to 0.$$

Por otro lado, supongamos que $\{z_n\} \to \alpha \in \mathbb{C}$. Entonces, por la continuidad de g tenemos que:

$$\{g(z_n)\} = \{w_n\} \to g(\alpha)$$

En contradicción con que $\{w_n\} \to \infty$. Por tanto, $\{z_n\} \to \infty$. Por la continuidad de f, g y que $f(g(z)) = z^3$, tenemos que:

$$\{f(g(z_n))\} = \{z_n^3\} \to \infty.$$

Por tanto, llegamos a que la sueción $\{f(g(z_n))\}$ es a la vez convergente y divergente, lo que es una contradicción. Por tanto, f es un polinomio.

Por tanto, f y g son polinomios. Como $f(g(z)) = z^3$, tenemos que:

$$\deg(f) \cdot \deg(g) = 3 \Longrightarrow \{\deg(f), \deg(g)\} = \{1, 3\}.$$

Por tanto, una de las funciones es un polinomio de grado uno y la otra es un polinomio de grado tres.